ALFONSO BURGOS

# iniciación a la lógica matemática

# *iniciación a la lógica matemática*

# iniciación a la lógica matemática

**ALFONSO BURGOS**

Profesor de las Universidades
Central de Venezuela y Católica Andrés Bello

**SELECCIONES CIENTIFICAS**
**Avda. de Filipinas, 42**
**MADRID-3**

*Primera edición, 1970*
*Segunda edición, 1973*

© Alfonso Burgos

I.S.B.N. 84-85021-32-0

DEPÓSITO LEGAL: M. 5603-1973

Printed in Spain. Impreso en España por Selecciones Gráficas,
Avda. de Filipinas, 22, Madrid.—1973.

*A mi sobrino Alfonso, que espero sea en el futuro un buen matemático.*

# prólogo

*La buena acogida dispensada por colegas y estudiantes a mi última publicación* Iniciación a la Matemática Moderna *me obliga a completarla con una nociones de Lógica Matemática.*

*El presente trabajo tuvo su origen en unos apuntes que se publicaron en la Escuela de Economía de la Universidad Central de Venezuela para uso de los estudiantes del primer semestre.*

*Teniendo en cuenta que el desarrollo teórico resulta a veces un tanto árido, he colocado después de cada concepto y de cada conclusión el ejemplo o ejercicio aclaratorio adecuado para que aquéllos se graben en forma definitiva.*

*Al final de la teoría y bajo el título de «Problemas resueltos» va una seleccionada colección de problemas totalmente explicados.*

*A continuación, una colección similar a la anterior de «Problemas propuestos» completa la parte práctica del libro.*

*De esta forma he reunido en un solo tomo la teoría y el problemario correspondientes, con las ventajas económicas y, sobre todo, pedagógicas que esto representa para el alumnado.*

*Aproximadamente una tercera parte de los ejercicios están cuidadosamente seleccionados de algunas de las obras que figuran en la Bibliografía. He creído más honesta esta conducta que la de cambiar la forma de problemas tomados de otros libros, con la vana pretensión de que parezcan originales.*

*No pretendo haber agotado ninguno de los temas tratados en este libro; mi labor ha estado encaminada a presentar una visión orientadora de cada uno de ellos.*

*Tampoco he abordado todos los temas que hubiera querido, so pena de haber extendido demasiado la obra.*

*Del acierto de este trabajo corresponde juzgar al lector; pero sepa éste que sólo me anima un deseo: facilitar al estudiantado el conocimiento de las nociones fundamentales de la Lógica Matemática, que es base y sostén de la Matemática Moderna.*

*También me guía solamente un propósito: contribuir, dentro de la modestia de este trabajo, a liberar a Venezuela del vasallaje que, salvo honrosas excepciones, se rinde a los libros extranjeros.*

*Daré por bien empleados mis esfuerzos, si he contribuido con algo al acervo cultural de la nación.*

*Al final de este libro, en la Bibliografía, se insertan los autores que han sido consultados y las obras de las cuales se han tomado ejercicios.*

A. BURGOS.

Caracas, 1970.

# 1

# lógica matemática

## 1. Proposiciones

Llamaremos *proposición* a todo enunciado respecto del cual se disponga de un criterio que nos permita afirmar que su contenido es o verdadero o falso.

**Ejemplos:**

*a)* El hierro es un metal.
*b)* La nieve es blanca.
*c)* $4+8=12$.
*d)* Alejandro Magno nació en Cuba.
*e)* Las hojas de los árboles son de cristal.
*f)* $3+7<2$.
*g)* Hacer con bueno tan.
*h)* $x-\sqrt{5}=$trángulo.

Los seis primeros ejemplos son proposiciones, pues para cada una de ellas se dispone de un criterio (químico, óptico, aritmético, histórico, botánico) que nos permite afirmar que las tres primeras son verdaderas y que las tres siguientes son falsas. En cambio, los ejemplos *g)* y *h)* no son proposiciones, ya que no existe ningún tipo de criterio que nos permita dilucidar sobre la veracidad o falsedad de su contenido.

Una proposición es, pues, un enunciado en que se afirma algo, independientemente de que sea verdad o falso lo que se afirma.

Las proposiciones las representaremos con letras minúsculas en carácter normal, $p$, $q$, $r$, ..., a las que denominaremos *letras proposicionales*.

Así, las proposiciones de los seis primeros ejemplos podrán ser representadas por letras proposicionales.

Las proposiciones anteriores se llaman *atómicas.* En cambio, denominaremos *proposiciones moleculares* o *fórmulas,* a las que se obtienen combinando proposiciones atómicas mediante ciertas partículas, llamadas *conectivas.*

Así, de las proposiciones atómicas:

(1) El diamante es un mineral.

(2) El Danubio es un río de Austria

obtenemos la proposición molecular:

(3) El diamante es un mineral *y* el Danubio es un río de Austria.

Si las proposiciones (1) y (2) las representamos con $p$ y $q$, respectivamente, la proposición molecular (3) vendrá representada con la notación:

$$p \text{ y } q.$$

Las proposiciones moleculares las representaremos con letras mayúsculas en carácter normal, $P$, $Q$, $R$, ..., a las que también llamaremos *letras proposicionales.*

## 2. Conectivas

Denominaremos *conectiva* de una proposición molecular al elemento verbal o escrito que une a las proposiciones atómicas que forman aquélla. Por extensión, a la negación de una proposición también le llamaremos conectiva.

Hay, pues, dos tipos de conectivas: las que ligan dos proposiciones atómicas o *conectivas múltiples* y las negaciones o *conectivas singulares.*

Para el desarrollo de este libro sólo necesitaremos de las seis conectivas siguientes:

«no», «y», «o», «o ... o», «si ... entonces», «si y sólo si».

**Ejemplos:**

*a)* **No** (los tres ángulos de un triángulo rectángulo son iguales).

*b)* José estudia matemáticas **y** José estudia violín.

*c)* Está nublado **o** hace frío.

*d)* **O** el número natural $n$ es par **o** el número natural $n$ es impar.

*e)* **Si** la nieve es negra, **entonces** el gato es un cuadrúpedo.

*f)* El triángulo tiene cuatro lados **si y sólo si** $3 \times 5 = 9$.

**Observaciones.** 1.ª Aunque la construcción gramatical de los ejemplos *a)* y *b)* no es la más apropiada, a veces es preferible hacerlo así para evitar ambigüedades.

2.ª Más adelante serán debidamente aclarados los, por el momento, extraños ejemplos *e)* y *f)*.

Si las proposiciones atómicas las representamos con $p$ y $q$, las proposiciones moleculares que serán objeto de nuestro estudio, son:

«no $p$», «$p$ y $q$», «$p$ o $q$», «o $p$ o $q$»,
«si $p$ entonces $q$», «$p$ si y sólo si $q$».

Para una mejor comprensión de las seis conectivas señaladas anteriormente, procederemos a continuación a estudiarlas por separado.

I. La conectiva «no» o negación es la única conectiva singular de las que vamos a estudiar; la representaremos con el signo «$-$» colocado encima de la letra proposicional, o bien con una coma en la parte superior derecha; por tanto, si la letra proposicional es $p$, escribiremos:

(1) $\bar{p}$ o bien $p'$

se lee «no $p$».

**Ejemplos:**

*a)* No Caracas es la capital de Francia.

*b)* No la raíz cuadrada de 2 es un número racional.

Aunque en el lenguaje español ordinario, «no» debe seguir al sujeto, en el lenguaje lógico se prefiere anteponerlo a la proposición para evitar ambigüedades.

II. La conectiva «y» o conjunción copulativa, cuyo objeto es unir dos proposiciones, la representaremos con el signo «$\wedge$»; por tanto, si las proposiciones son $p$ y $q$, escribiremos:

(2) $$p \wedge q$$

y leeremos «$p$ y $q$».

La proposición (2) es el *producto lógico* de las proposiciones $p$ y $q$ y éstas son sus *factores.*

**Ejemplos:**

*a)* Hace sol y está lloviendo.

*b)* El número 15 es divisible por 3 y por 5.

III. La conectiva «o» o conjunción disyuntiva inclusiva, denota alternativa y simultaneidad entre dos proposiciones, la representaremos con el signo «$\vee$»; por tanto, si las proposiciones son $p$ y $q$, escribiremos:

(3) $$p \vee q$$

se lee «$p$ o $q$», o bien «$p$ o/y $q$».

La proposición (3) es la *suma lógica* de las proposiciones $p$ y $q$ y éstas son los *sumandos.*

Conviene aclarar que la proposición (3) debe tomarse con uno de los significados siguientes: 1.° Se verifica la proposición $p$, pero no la $q$; 2.° Se verifica la proposición $q$, pero no la $p$; 3.° Se verifican simultáneamente las proposiciones $p$ y $q$.

**Ejemplos:**

*a)* José se casa o José se compra un paraguas.

La proposición molecular anterior debe tomarse en el sentido de que José se dará por satisfecho de una de las tres formas siguientes:

1.° Casándose y no comprándose un paraguas.

2.° Comprándose un paraguas y no casándose; y

3.° Casándose y comprándose un paraguas.

*b)* El número natural $n$ es múltiplo de 3 o de 5.

Esta proposición debemos tomarla en el sentido de que el número $n$ puede ser:

1.° Múltiplo de 3 pero no de 5.

2.° Múltiplo de 5 pero no de 3; y

3.° Múltiplo de 3 y de 5 simultáneamente.

IV. La conectiva «o ... o», o conjunción disyuntiva exclusiva, indica alternativa entre dos proposiciones $p$ y $q$, la representaremos con el signo «$\underline{\vee}$». La proposición molecular correspondiente vendrá representada, pues, en la forma:

(4) $$p \,\underline{\vee}\, q$$

leeremos «o $p$ o $q$», o bien «$p$ o $q$, pero no ambos».

La proposición anterior es la *suma booleana* de las proposiciones $p$ y $q$ y éstas son los *sumandos*.

La proposición (4) debe tomarse con uno de los dos significados siguientes: 1.° Se verifica $p$, pero no $q$. 2.° Se verifica $q$, pero no $p$.

**Ejemplos:**

*a)* O voy esta tarde al teatro o voy al cine.

Esta proposición debe tomarse en el sentido de que si voy al teatro no voy al cine y de que si voy al cine no iré al teatro, pero de que iré a uno de estos espectáculos.

*b)* El número real $\alpha$ o es racional o es irracional.

El significado de la proposición anterior está bien claro, pues un número real puede ser racional o irracional, pero no ambas cosas a la vez.

V. La conectiva «si ... entonces», o condicional, se usa para obtener una proposición molecular a partir de dos atómicas, sin pretender en ningún momento que el enunciado obtenido vaya a responder siempre a la idea gramatical ordinaria que se tiene sobre éstos.

La conectiva condicional la representaremos con el signo «$\longrightarrow$»; por tanto, la proposición molecular correspondiente a las proposiciones $p$ y $q$ deberá ser escrita en la forma:

(5) $$p \longrightarrow q$$

leeremos «si $p$ entonces $q$».

En la proposición anterior, $p$ es el *antecedente* y $q$ el *consecuente* del condicional.

**Ejemplos:**

*a)* Si los elefantes vuelan entonces la nieve es negra.

*b)* Si los triángulos tienen cuatro lados entonces Madrid es la capital de España.

Los ejemplos anteriores extrañarán al lector desprevenido, pues les parecerán (y estarán en lo cierto) enunciados incoherentes y desprovistos de todo significado; pero si revisa de nuevo la definición de la conectiva en estudio, podrá comprobar que dichos ejemplos son efectivamente proposiciones moleculares, independientemente de que san verdaderas o falsas las proposiciones $p$ y $q$ y de que entre éstas exista o no dependencia.

VI. La conectiva «si y sólo si», o bicondicional, se usa (al igual que la anterior) para obtener una proposición molecular a partir de dos atómicas, prescindiendo de que el enunciado obtenido tenga o no sentido gramatical y de que entre las proposiciones atómicas componentes exista o no dependencia.

Aun cuando, de acuerdo con la definición, esta conectiva coincide con la anterior, al estudiar las tablas de verdad tendremos oportunidad de establecer las debidas diferencias entre ambas.

La conectiva bicondicional la representaremos con el signo «$\prec\!\!\succ$»; por tanto, la proposición molecular correspondiente a las proposiciones $p$ y $q$ deberá ser escrita en la forma:

(6) $$p \prec\!\!\succ q$$

leeremos «$p$ si y sólo si $q$».

En (6), $p$ es el *antecedente* y $q$ el *consecuente* del bicondicional.

**Ejemplos:**

*a)* Los gatos son vertebrados si, y sólo si, París es la capital de Francia.

*b)* Los números pares son divisibles por dos si, y sólo si, los pentágonos tienen cuatro lados.

## 3. Operaciones

Si $\boldsymbol{E}$ es el conjunto de todas las proposiciones (atómicas y moleculares), $p$ y $q$ dos proposiciones atómicas cualesquiera y designamos con $\perp$ una cualquiera de las cinco conectivas múltiples estudiadas en el número anterior, es obvio que $p \perp q$ pertenece a $\boldsymbol{E}$; por tanto, podemos asimilar el papel de las conectivas al de los signos de operaciones aritméticas elementales.

En este orden de ideas, las proposiciones de partida $p$ y $q$ son las *componentes* o *datos* de la operación, la proposición molecular obtenida es el *resultado* de aquélla y la regla que permite obtener el resultado a partir de los datos, es la *ley de composición* de la operación.

Si la proposición resultado la representamos con $R$, podremos escribir:

$$p \perp q = R$$

leeremos «$p$ compuesto con $q$ igual $R$».

La forma de leer la igualdad anterior nos induce a llamar a $R$ indistintamente «proposición molecular» o «proposición compuesta».

Por otra parte, como el número de datos de la operación es

dos, ésta diremos que es *binaria* y como además es siempre posible que es *cerrada* o que tiene la propiedad de *clausura.*

Finalmente, como el resultado de la operación es siempre una proposición de *E,* diremos que aquélla es *interior.*

Por extensión, cuando formamos la negación de una proposición *p* diremos, también, que hemos efectuado una operación con aquélla.

Si la proposición resultado la representamos con *R,* podremos escribir:

$$\bar{p}=R$$

leeremos «no *p* igual *R*».

Como en este caso no hay más que un dato, diremos que se trata de una operación *unitaria.*

Por supuesto, que la operación unitaria «no» es también cerrada e interior.

Qué duda cabe que es fácilmente generalizable las operaciones con proposiciones atómicas al caso en que los datos sean proposiciones moleculares cualesquiera y que, por tanto, si los datos son las proposiciones moleculares *P* y *Q* y el resultado es *R,* tendremos:

$$P \perp Q=R.$$

Para la operación unitaria «no» tendremos, análogamente:

$$\overline{P}=R.$$

## 4. Tablas de verdad

Puesto que según el número 1, toda proposición atómica o es verdadera o es falsa; si a estas posibilidades les llamamos *valores de verdad* y las representamos con *V* y con *F,* respectivamente, podremos establecer el principio siguiente:

I. *A toda proposición atómica le corresponde o V o F.*

Como es de suponer, el problema se torna más complejo cuando se trata de decidir sobre la verdad o falsedad de una proposición compuesta. A este efecto, admitiremos el principio siguiente:

II. *El valor de verdad de cualquier proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones atómicas componentes.*

Este segundo principio nos induce a llamar *funciones veritativas* a las proposiciones compuestas.

Con objeto de facilitar la aplicación del segundo principio, se puede recurrir a unos esquemas llamados *tablas de verdad.*

Estas tablas permiten determinar mecánicamente la verdad o falsedad de una cualquiera de las seis proposiciones compuestas (1) a (6) del número 2, cuando son conocidos los valores de verdad de las proposiciones componentes.

Comenzaremos por examinar los valores de verdad que pueden tomar una o dos letras proposicionales.

*a)* Puesto que una proposición atómica *p*, o es verdad o es falsa, podremos esquematizar estos resultados en la forma siguiente:

| *p* |
|---|
| *V* |
| *F* |

*b)* Si las letras proposicionales son *p* y *q*, como las posibilidades de verdad o de falsedad que pueden tomar son:

1.ª Ambas son verdad.

2.ª La primera es verdad y la segunda es falsa.

3.ª La primera es falsa y la segunda es verdad.

4.ª Ambas son falsas.

Esquematizando los resultados obtenidos tendremos:

| *p* | *q* |
|---|---|
| *V* | *V* |
| *V* | *F* |
| *F* | *V* |
| *F* | *F* |

Los esquemas anteriores nos permitirán la construcción de las tablas de verdad de las seis conectivas estudiadas en el número 2.

TABLAS DE VERDAD. Tabla de verdad de una conectiva múltiple es un cuadro formado por tres columnas, ordenadas de izquierda a derecha y encabezadas, las dos primeras, por las letras proposicionales, en el orden en que éstas aparecen en la fórmula (proposición compuesta). La tercera columna debe ir encabezada por la fórmula, cuyos valores de verdad se trata de investigar.

Finalmente, en las cuatro filas que siguen a la de los encabezamientos, deben figurar los valores de verdad o falsedad de las letras proposicionales y los de la fórmula en estudio.

En particular, la tabla de verdad de la conectiva singular «no», consta solamente de dos columnas; la primera encabezada por la letra proposicional y la segunda encabezada por la negación de ésta.

Por razones de sencillez en el estudio y construcción de las tablas de verdad seguiremos el orden establecido en el número 2 para el estudio de las conectivas.

1. *Tabla de verdad de la conectiva* «no». Si es $p$ una proposición atómica cualquiera, su negación será $\bar{p}$, y como:

si $p$ es verdadera, $\bar{p}$ será falsa,

si $p$ es falsa, $\bar{p}$ será verdadera.

Esquematizando los resultados obtenidos en una tabla de verdad, tendremos:

| $p$ | $\bar{p}$ |
|---|---|
| $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ |

2. *Tabla de verdad de la conectiva* «y». Si son $p$ y $q$ dos proposiciones atómicas cualesquiera, como:

1.° Si $p$ es verdadera y $q$ es verdadera, entonces «$p$ y $q$» será verdadera.

2.° Si $p$ es verdadera y $q$ es falsa, entonces «$p$ y $q$» será falsa.

3.° Si $p$ es falsa y $q$ es verdadera, entonces «$p$ y $q$» será falsa.

4.° Si $p$ es falsa y $q$ es falsa, entonces «$p$ y $q$» será falsa.

Esquematizando los resultados obtenidos en una tabla de verdad tendremos:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

2. *Tabla de verdad de la conectiva* «o». Consideraciones análogas a las hechas en el caso anterior nos conducen a la tabla de verdad siguiente:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

4. *Tabla de verdad de la conectiva* «o ... o». La tabla de verdad de esta conectiva es:

| $p$ | $q$ | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

5. *Tabla de verdad de la conectiva* «si ... entonces». Con carácter de definición daremos la tabla siguiente para esta conectiva:

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

El carácter de definición de la tabla anterior nos exime de toda justificación; cosa que nos viene muy bien, pues en infinidad de casos ni siquiera existirá relación alguna entre el antecedente y el consecuente de la proposición compuesta en estudio; lo cual nos pondría ciertamente en gran aprieto en el momento en que tratáramos de buscar razones intuitivas para decidir sobre el valor de verdad de la repetida proposición.

6. *Tabla de verdad de la conectiva* «si, y sólo si». También con carácter de definición, daremos la tabla siguiente para esta conectiva:

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

Las seis tablas que acabamos de construir, nos señalan el camino a seguir para componer la tabla de verdad de cualquier proposición molecular, dados los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la forman.

Comenzaremos por indicar todos los valores de verdad posibles que pueden tomar las letras proposicionales que figuran en la fórmula en estudio, para después ir deduciendo mecánicamente (tablas 1 a 6) los valores de verdad de las proposiciones previas a la proposición final.

Así, por ejemplo, para hallar los valores de verdad de la proposición $p \wedge \bar{q}$, construiremos la tabla siguiente:

| $p$ | $q$ | $\bar{q}$ | $p \wedge \bar{q}$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |

Análogamente, las tablas de verdad para las proposiciones $\bar{p} \wedge \bar{q}$, $p \vee \bar{q}$ y $\bar{p} \vee \bar{q}$ son:

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \wedge \bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

| $p$ | $q$ | $\bar{q}$ | $p \vee \bar{q}$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \vee \bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

Si las letras proposicionales fueran $p$, $q$ y $r$; como las posibilidades de verdad o de falsedad que les corresponde son las variaciones terciarias con repetición *, que se pueden formar con las letras $V$ y $F$; esto es, $2^3$. Si estas variaciones las ponemos en líneas horizontales, obtendremos así un cuadro formado por tres columnas,

* Alfonso Burgos, *Matemáticas generales* (3.ª ed.), tomo 1, pág. 20.

que encabezadas por las letras proposicionales dadas, quedará en la forma siguiente:

| $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

A partir de este cuadro y teniendo en cuenta las tablas de verdad fundamentales (1 a 6), podremos hallar la tabla de verdad de cualquier fórmula en la que figuren tres letras proposicionales siguiendo un proceso similar al empleado para las fórmulas de dos letras proposicionales. Así, por ejemplo, para hallar los valores de verdad de las fórmulas

$$p \rightarrow (q \vee r) \quad \text{y} \quad (p \wedge q) \leftrightarrow r,$$

construiremos las tablas de verdad siguientes:

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \vee r$ | $p \rightarrow (q \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \longleftrightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |

El camino seguido para la obtención de las tablas de verdad para fórmulas con dos y tres letras proposicionales, nos señala el camino a seguir para obtener los valores de verdad de fórmulas con cualquier número de letras proposicionales; claro está, que la tabla correspondiente se irá haciendo cada vez más compleja a medida que aumenta el número de letras proposicionales.

En general, la tabla de verdad para una fórmula con $n$ letras proposicionales constará de $2^n$ filas, en cuanto al número de columnas nada puede decirse, pues depende de la complejidad de la fórmula en estudio.

Es obvio que todo lo dicho sobre construcción de tablas de verdad subsiste aun cuando se trate de fórmulas constituidas por proposiciones compuestas.

En este caso se prefiere usar mayúsculas, $P$, $Q$, $R$, ..., para letras proposicionales.

## 5. Tautologías

Se dice que una proposición compuesta es una *tautología* o que es *lógicamente verdadera,* si, y sólo si, dicha proposición es verdadera cualesquiera que sean las proposiciones atómicas que la formen.

Es inmediato que la tabla de verdad de una tautología contendrá sólo uves en la última columna.

Si la tabla de verdad de una proposición compuesta contiene sólo efes, diremos que dicha proposición es *contradictoria* o *lógicamente falsa.* Finalmente, cuando la tabla de verdad de una proposición compuesta contiene uves y efes, se dice que dicha proposición es *indeterminada.*

Así, por ejemplo, las tablas de verdad siguientes corresponden a una tautología, una contradicción y una indeterminación, respectivamente.

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge r$ | $p \vee q$ | $(p \wedge r) \rightarrow (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | V | V |
| V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V | V |
| F | V | F | F | V | V |
| F | F | V | F | F | V |
| F | F | F | F | F | V |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \wedge q \rightarrow p$ | $((p \wedge q) \rightarrow p)'$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge q$ | $p \vee r$ | $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |

## 6. Implicaciones

Diremos que una proposición $P$ implica una proposición $Q$, si, y sólo si, la proposición condicional $P \rightarrow Q$ es una tautología.

Es de advertir que tanto $P$ como $Q$ pueden ser proposiciones atómicas o compuestas.

Si $P$ implica $Q$, escribiremos:

(1) $$P \Longrightarrow Q$$

y leeremos «$P$ implica $Q$».

A la proposición compuesta (1) se le llama *teorema*, $P$ es la *hipótesis* y $Q$ la *tesis*.

**Ejercicio:**

Probar que

$$p \wedge (q \vee r) \Longrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

*Solución:*

Basta construir la tabla de verdad de la proposición

$$[p \wedge (q \vee r)] \longrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

y comprobar que en la última columna sólo hay uves.

Del ejercicio anterior se sigue que

$$p \wedge (q \vee r) \Longrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

es un teorema y que

$$p \wedge (q \vee r)$$

es la hipótesis y

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

es la tesis.

Si $P$ implica $Q$, e inversamente, $Q$ implica $P$, se dice que $P$ y $Q$ son *equivalentes* y se escribe:

(2) $$P \equiv Q \quad \text{o bien} \quad P \Longleftrightarrow Q.$$

Leeremos «$P$ equivalente a $Q$».

Para probar la equivalencia de dos proposiciones $P$ y $Q$ bastará construir la tabla de verdad de la proposición $P \longleftrightarrow Q$ y comprobar que las anotaciones de la última columna son sólo uves.

En la práctica, no es necesario llegar a la última columna, pues si se llegara a obtener iguales anotaciones (*VV*, o bien *FF*) en cada fila de las columnas encabezadas con *P* y *Q*, según la tabla 6 del número 4; las anotaciones de la última columna serían sólo uves.

Así, por ejemplo, para probar la equivalencia de las proposiciones $p \vee q$ y $q \vee p$ construiremos la tabla de verdad

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $q \vee p$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |

y como se observa que las columnas encabezadas por $p \vee q$ y $q \vee p$ tienen iguales anotaciones en cada una de sus filas, podemos concluir que

$$p \vee q \equiv q \vee p.$$

## 7. Leyes del cálculo proposicional

De las infinitas tautologías posibles, algunas juegan un papel fundamental en la «Inferencia lógica» (núm. 8). Estas tautologías básicas son las siguientes:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $p \longrightarrow p$ | Identidad |
| (2) | $p \longleftrightarrow p$ | |
| (3) | $(p \wedge \bar{p})'$ | Contradicción |
| (4) | $p \vee \bar{p}$ | Tercio excluso |
| (5) | $p \longleftrightarrow (p')'$ | Doble negación |

(6) $p \wedge q \rightarrow p$
(7) $p \rightarrow p \vee q$ — Simplificación

(8) $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
(9) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
(10) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ — Conmutativa

(11) $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
(12) $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
(13) $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$ — Asociativa

(14) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
(15) $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
(16) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$
(17) $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$ — Distributiva

(18) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
(19) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow (p \leftrightarrow r)$ — Transitiva

(20) $[((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$ — Dilema

(21) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ — Exportación

(22) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$
(23) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \leftrightarrow \bar{p})$ — Transposición

(24) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ — Bicondicional

(25) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ — Condicional-disyunción

(26) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \bar{q})'$ — Condicional-conjunción

(27) $(p \wedge q)' \leftrightarrow (p' \vee q')$
(28) $(p \vee q)' \leftrightarrow (p' \wedge q')$ — Dualidad o Morgan

(29) $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow [p \longleftrightarrow (p \wedge q)]$

(30) $(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow [q \longleftrightarrow (p \vee q)]$

} Expansión

(31) $[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q$ *Modus ponens*

(32) $[(p \longrightarrow q) \wedge \bar{q}] \longrightarrow \bar{p}$ *Modus tollens* *

En virtud de las definiciones de implicación y equivalencia (número 6), cada una de las tautologías anteriores dará lugar a una implicación o a una equivalencia, según que la proposición correspondiente sea condicional o bicondicional, respectivamente.

Si a las implicaciones y equivalencias les llamamos *leyes del cálculo proposicional,* las anteriores tautologías darán lugar a otras tantas leyes de cálculo proposicional.

Así, por ejemplo, las tautologías

$$[(p \longrightarrow q) \wedge \bar{q}] \longrightarrow \bar{p} \quad \text{y} \quad (p \wedge q)' \longleftrightarrow (p' \vee q')$$

dan lugar a las leyes

$$[(p \longrightarrow q) \wedge \bar{q}] \Longrightarrow \bar{p} \quad \text{y} \quad (p \wedge q)' \equiv (p' \vee q')$$

## 8. La inferencia en lógica

Si actuando según unas reglas dadas, sobre unas fórmulas también dadas, obtenemos una nueva fórmula, diremos que ésta se ha *inferido* o *deducido* de aquéllas.

A las reglas dadas se les llama *reglas de inferencia,* a las fórmulas de partida *premisas* y a la fórmula de llegada *conclusión.*

Al proceso mediante el cual la conclusión se sigue de las premisas se le llama *prueba, deducción* o *demostración.*

A las inferencias que siguen las reglas establecidas se les llama *correctas,* e *incorrectas* a las que nos las siguen.

**Reglas de inferencia.** Son las que de cada conjunto suficiente de premisas, $P_1$, $P_2$, ..., nos permite deducir una conclusión $C$. Son

* Las 32 leyes anteriores están tomadas, salvo notaciones, de *Lógica matemática,* por José Ferrater Mora y Hugues Leblanc, págs. 42 y sigs.

varios los sistemas de reglas que resuelven este problema; uno de ellos es el que está integrado por las reglas siguientes:

1.ª REGLA DE SEPARACIÓN. *Si tomamos como premisas un condicional y su antecedente, el consecuente puede ser inferido como conclusión.*

Si las premisas $P_1$ y $P_2$ las ponemos una encima de otra, debajo de ellas una línea horizontal y debajo de ésta la conclusión $C$, la primera regla de inferencia puede ser escrita en la forma simbólica siguiente:

$$\begin{array}{ll} P_1: & p \rightarrow q \\ P_2: & p \\ \hline C: & q \end{array}$$

**Ejemplo:**

$P_1$: José gana la lotería $\rightarrow$ su mujer se alegra
$P_2$: José gana la lotería

$C$: Su mujer se alegra.

2.ª REGLA DE UNIÓN. *Si dos proposiciones son tomadas como premisas, su conjunción puede ser inferida como conclusión.*

Procediendo como en el caso anterior, la segunda regla puede ser escrita en la forma simbólica siguiente:

$$\begin{array}{ll} P_1: & p \\ P_2: & q \\ \hline C: & p \wedge q \end{array}$$

**Ejemplo:**

$P_1$: José se casa
$P_2$: A José le gusta el cine

$C$: José se casa y a José le gusta el cine.

3.ª **REGLA DE INSERCIÓN.** *Cualquiera de las tautologías del número 7 puede ser tomada como premisa para el desarrollo de cualquier inferencia.*

La tercera regla puede ser escrita en la forma siguiente:

$P_1$: $p_1$
$P_2$: $p_2$
... ...
... ...
$P_n$: $p_n$
$P_{n+1}$: Cualquiera de las tautologías del núm. 7

---

$C$: La inferida de las premisas anteriores.

**Ejercicio:**

Probar que la inferencia siguiente es correcta:

$P_1$: Si como mucho $\longrightarrow$ engordo
$P_2$: Si engordo $\longrightarrow$ me canso

---

$C$: Si como mucho $\longrightarrow$ me canso.

Si con objeto de simplificar la escritura representamos con $p$, $q$ y $r$, respectivamente, las proposiciones: «como mucho», «engordo» y «me canso», la inferencia anterior puede ser escrita en la forma abreviada siguiente:

$$P_1: \quad p \longrightarrow q$$
$$P_2: \quad q \longrightarrow r$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$C: \quad p \longrightarrow r$$

La regla de unión permite derivar de las premisas que,

$$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r).$$

Ahora bien, la regla de inserción nos autoriza a «insertar» a la proposición anterior, la tautología (18); tendremos así:

$$P_1': \quad [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$$
$$P_2': \quad (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r).$$

Finalmente, la regla de separación nos permite derivar de las premisas anteriores que:

$$«p \longrightarrow r»;$$

esto es, que:

«Si como mucho $\longrightarrow$ me canso»,

que es precisamente la conclusión que queríamos probar.

4.ª REGLA DE INTERCAMBIO. *Si dadas dos premisas, una de ellas es un bicondicional y uno de sus miembros figura en la otra, podemos inferir, como conclusión, el resultado de intercambiar el miembro común de la premisa no bicondicional, por el correspondiente de la bicondicional.*

Esta segunda regla puede ser escrita en la forma simbólica siguiente:

$$P_1: \quad p \longrightarrow q$$
$$P_2: \quad q \longleftrightarrow r$$
$$\hline$$
$$C: \quad p \longrightarrow r$$

**Ejemplo:**

$P_1$: Hace mal tiempo $\longrightarrow$ José no viaja

$P_2$: José no viaja $\longleftrightarrow$ Alicia se alegra

$C$: Hace mal tiempo $\longrightarrow$ Alicia se alegra.

NOTA. Es inmediato que, si $P_1$, $P_2$, $P_3$, ..., $P_n$ son las premisas y $C$ la conclusión de una inferencia; esta es co-

rrecta si, y sólo si, la conjunción de las premisas implica la conclusión. Esto es, si, y sólo si:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \Longrightarrow C$$

Así, por ejemplo, para probar que son correctas las inferencias de las reglas de separación, unión e intercambio, bastará con que probemos que son tautologías los condicionales:

$$[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q;$$

$$(p \wedge q) \longrightarrow (p \wedge q) \quad \text{y}$$

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$$

respectivamente, lo cual se consigue con la construcción de las tablas de verdad correspondientes.

**Regla práctica.** En la práctica, para efectuar el desarrollo de una prueba, procederemos así:

1.° Se simbolizan las proposiciones (premisas y conclusión).

2.° Se detallan las premisas precediéndolas de $P_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), en líneas sucesivas.

3.° Se detallan las fórmulas necesarias para poder derivar la conclusión. Cada una de estas fórmulas se precede de $P_j$ ($j = n+1$, $n+2$, ...) y se le sigue de la regla de inferencia y las tautologías (número 7) o premisas anteriores que nos permiten hacer la derivación.

Las abreviaturas para las reglas de inferencia son:

Un. para «regla de unión»;

Sep. para «regla de separación»;

Ins. para «regla de inserción»;

y, finalmente, Int. para «regla de intercambio».

Las abreviaturas para las tautologías son:

$$T_1, T_2, T_3, \ldots$$

4.° Se escribe la conclusión precediéndola de la letra $C$.

**Ejercicio:**

De las premisas: «Si los precios suben, la inflacción es inevitable» y «si los precios no suben, la deflacción es inevitable» se pide derivar la conclusión: «La inflacción o deflacción son inevitables».

*Prueba:*

Si representamos con $p$, $q$ y $r$, respectivamente, «los precios suben», «la inflacción es inevitable» y «la deflacción es inevitable», tendremos:

$P_1$: $p \longrightarrow q$;

$P_2$: $\bar{p} \longrightarrow r$;

$P_3$: $p \vee \bar{p}$; Ins. de $T_4$

$P_4$: $[((p \longrightarrow q) \wedge (\bar{p} \longrightarrow r)) \wedge (p \vee \bar{p})] \longrightarrow q \vee r$ Ins. de $T_{20}$

$P_5$: $(p \longrightarrow q) \wedge (\bar{p} \longrightarrow r)$; Un. de $P_1$ y $P_2$.

$P_6$: $((p \longrightarrow q) \wedge (\bar{p} \longrightarrow r)) \wedge (p \vee \bar{p})$; Un. de $P_5$ y $P_3$.

$C$: $q \vee r$; Sep. de $P_4$ y $P_6$.

## 9. Lenguaje y cálculo

El *lenguaje* utilizado en los números anteriores puede ser *formalizado*, esto es, transformado en un *cálculo*. Comenzaremos para ello por señalar las diferencias que hay entre lenguaje y cálculo.

Un lenguaje es un conjunto de *signos* (letras, símbolos convencionales, palabras orales y escritas) *interpretados*, así como de las reglas que permiten agrupar dichos signos y leer las *expresiones* que resulten de tales agrupaciones.

En cambio, un cálculo es un lenguaje en el que se prescinde de la interpretación de sus signos.

Para desarrollar un cálculo debemos comenzar por detallar los signos que se van a emplear.

Los signos pueden ser *primitivos* o *definidos*.

Del conjunto de signos de un cálculo, adoptaremos varios de ellos como básicos o *primitivos,* si hay posibilidad de expresar los restantes en función de los primeros. A los signos no primitivos les llamaremos *signos definidos.*

Antes de dar los signos que vamos a emplear en el cálculo, debemos proceder a decir algo sobre la definición. Una definición es una convención en virtud de la cual una expresión puede ser sustituida por otra.

A la primera expresión la llamaremos *definiendum* o *primer miembro* de la definición. El *definiendum* contiene los signos que se tratan de definir.

La segunda expresión es el *definiens* o *segundo miembro* de la definición y contiene los signos que definen a los del *definiendum.*

Si representamos con $E$ y $F$, respectivamente, al *definiendum* y al *definiens,* escribiremos:

$$E = \text{def. } F$$

y leeremos: «$E$ igual por definición a $F$».

Es inmediato que en el cálculo, los signos no primitivos deben ser definidos en función de ciertos signos primitivos. De los diferentes tipos de definición usados en el cálculo, dos de ellos tienen para nosotros un interés especial: la definición *explícita* y la *contextual.*

En la definición explícita, el signo a definir figura en el definiendum fuera de todo contexto.

En cambio, en la definición contextual el signo a definir figura en el definiendum dentro de un contexto.

**Ejemplos:**

| | | |
|---|---|---|
| *a)* | $2 = \text{def. } 1+1$ | Definición explícita. |
| *b)* | $p \wedge q = \text{def. } (\bar{p} \vee \bar{q})'$ | Definición contextual. |

En el ejemplo *a),* el signo a definir 2, figura fuera de todo contexto, esto es, aislado. En cambio, en el ejemplo *b),* el signo a definir $\wedge$ figura dentro del contexto «$p \wedge q$».

NOTA. Aun cuando con la construcción de la tabla de verdad adecuada es fácil probar la equivalencia de las expresiones «$p \wedge q$» y «$(\bar{p} \vee \bar{q})'$» del ejemplo *b)*, el interés de este ejemplo de definición contextual radica en que nos señala la posibilidad de remitir el estudio de la conectiva «$\wedge$» en favor de las conectivas «$\vee$» y «$-$». Además, el repetido ejemplo *b)* nos sugiere la posibilidad de expresar también las conectivas «$\longrightarrow$», «$\longleftrightarrow$» y «$\underline{\vee}$» en función de las conectivas «$\vee$» y «$-$»; conseguiríamos con ello una gran economía del pensamiento al reducir a dos el estudio de las seis conectivas. Veremos a continuación que esto es posible y que, por tanto, las conectivas «$\vee$» y «$-$» pueden desempeñar el papel de signos primitivos:

**Ejercicios:**

Probar las equivalencias siguientes:

*a)* $(p \wedge q) \equiv (\bar{p} \vee \bar{q})'$,

*b)* $(p \longrightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q)$,

*c)* $(p \longleftrightarrow q) \equiv [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)]$,

*d)* $p \,\underline{\vee}\, q \equiv (p \longleftrightarrow q)'$.

*Resolución:*

*a)*

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \vee \bar{q}$ | $p \wedge q$ | $(\bar{p} \vee \bar{q})'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *V* | *V* | *F* | *F* | *F* | *V* | *V* |
| *V* | *F* | *F* | *V* | *V* | *F* | *F* |
| *F* | *V* | *V* | *F* | *V* | *F* | *F* |
| *F* | *F* | *V* | *V* | *V* | *F* | *F* |

b)

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $p \longrightarrow q$ | $\bar{p} \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

c)

| $p$ | $q$ | $p \longrightarrow q$ | $q \longrightarrow p$ | $p \longleftrightarrow q$ | $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

d)

| $p$ | $q$ | $p \longleftrightarrow q$ | $p \underline{\vee} q$ | $(p \longleftrightarrow q)'$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |

## 10. Cálculo proposicional

Las consideraciones del número anterior nos señalan la posibilidad de desarrollar un *cálculo*. Ahora bien, en su calidad de lenguaje, un cálculo quedará determinado cuando fijemos los «signos», «reglas de agrupación», «axiomas» y «reglas de inferencia» que lo van a regir.

Así, pues, podremos estructurar un cálculo en la forma siguiente:

**Signos.** I. SIGNOS PRIMITIVOS:

*a)* Las letras proposicionales $p$, $q$, $r$, ...; $P$, $Q$, $R$, ...

*b)* Las conectivas «$\vee$» y «$-$».

*c)* Los paréntesis «( )» y «[ ]».

II. SIGNOS DEFINIDOS. Las conectivas «$\wedge$», «$\longrightarrow$», «$\longleftrightarrow$» y «$\underline{\vee}$», definidas como a continuación se indica:

$D_1$: $\quad p \wedge q = \text{def. } (\bar{p} \vee \bar{q})'$

$D_2$: $\quad p \longrightarrow q = \text{def. } (\bar{p} \vee q)$

$D_3$: $\quad p \longleftrightarrow q = \text{def. } [(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)]$

$D_4$: $\quad p \mathbin{\underline{\vee}} q = \text{def. } (p \longleftrightarrow q)'$

**Reglas de agrupación.** Si llamamos *fórmula proposicional* a toda agrupación de signos, aquéllas podemos clasificarlas en *bien formadas* y *mal formadas*.

III. FÓRMULAS BIEN FORMADAS:

*a)* Las letras proposicionales.

*b)* La fórmula «$\bar{E}$», donde «$E$» es una fórmula bien formada.

*c)* La fórmula «$E \vee F$», donde «$E$» y «$F$» son fórmulas bien formadas.

*d)* Toda fórmula equivalente a una fórmula bien formada.

IV. FÓRMULAS MAL FORMADAS. Las fórmulas que no responden a ninguno de los cuatro casos de III diremos que están mal formadas. Las fórmulas mal formadas carecen de todo significado.

**Ejemplos:**

*a)* «$p \vee$»;

*b)* «$p \leftrightarrow$»;

*c)* «$p \wedge \vee q$», etc.

Las fórmulas bien formadas pueden ser tautologías, indeterminadas o contradictorias (número 5). De todas ellas sólo interesan a nuestro objetivo las tautologías.

**Axiomas.** Del conjunto de tautologías de un cálculo adoptaremos varias como *básicas* o *axiomas*, si hay posibilidad de inferir las restantes tautologías con la ayuda de unas reglas de inferencia dadas a partir de los axiomas, o bien de alguna de las tautologías obtenidas. Estos axiomas seleccionados pueden ser los que se indican en el cuadro siguiente:

V. CUADRO DE AXIOMAS:

$A_1$: $(p \vee p) \rightarrow p$

$A_2$: $p \rightarrow (p \vee q)$

$A_3$: $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

$A_4$: $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$

**Reglas de inferencia.** 1.ª REGLA DE SUSTITUCIÓN. *Una letra proposicional de una fórmula puede ser sustituida por cualquier fórmula bien formada.*

Esta regla la representaremos con la abreviatura «sust.».

**Ejemplo:**

En virtud de $A_2$ se tiene:

$$p \rightarrow (p \vee q).$$

Sustituyendo «$p$» por «$p \vee p$» y «$q$» por «$p$», tendremos la fórmula bien formada:

$$(p \vee p) \rightarrow (p \vee p).$$

2.ª REGLA DE SEPARACIÓN. *Si tomamos como premisas un condicional y su antecedente, el consecuente puede ser inferido como conclusión (primera regla del número 8).*

Esta regla la representaremos con la abreviatura «sep».

**Ejemplo:**

De

$$[(\bar{p} \vee p) \rightarrow (p \vee \bar{p})] \quad \text{y} \quad (\bar{p} \vee p),$$

se deduce:

$$(p \vee \bar{p}).$$

**Independencia, consistencia y plenitud.** Los axiomas y reglas de inferencia deben cumplir ciertas condiciones:

1.ª INDEPENDENCIA. *Ninguno de los axiomas debe poder derivarse de los restantes, y ninguna de las reglas de inferencia debe poder derivarse de las restantes (la otra, en nuestro sistema axiomático).*

2.ª CONSISTENCIA. *El cuadro de axiomas y las reglas de inferencia adoptados deben dar lugar sólo a tautologías de cálculo.*

3.ª PLENITUD. *Del cuadro de axiomas y las reglas de inferencia adoptados deben poder derivarse todas las tautologías del cálculo.*

Con carácter de ejercicios, desarrollamos a continuación la demostración de algunos teoremas.

**Ejercicios:**

TEOREMA 1:

$$p \longrightarrow (p \vee p).$$

*Prueba:*

Sust. de «$q$» por «$p$» en $A_2$.

TEOREMA 2:

$$(p \longrightarrow q) \longrightarrow [(r \longrightarrow p) \longrightarrow (r \longrightarrow q)].$$

*Prueba:*

*a)* $(p \longrightarrow q) \longrightarrow [(\bar{r} \vee p) \longrightarrow (\bar{r} \vee q]$.

Sust. de «$r$» por $\bar{r}$ en $A_4$.

*b)* $(p \longrightarrow q) \longrightarrow [(r \longrightarrow p) \longrightarrow (r \longrightarrow q)]$. Por $D_2$.

TEOREMA 3:

$$p \longrightarrow p.$$

*Prueba:*

*a)* $[(p \vee p) \longrightarrow p] \longrightarrow [(p \longrightarrow (p \vee p)) \longrightarrow (p \longrightarrow p)]$.

Sust. de «$p$» por «$p \vee p$», de «$q$» por «$p$» y de «$r$» por «$p$» en teorema 2.

*b)* $[p \longrightarrow (p \vee p)] \longrightarrow (p \longrightarrow p)$.

Sep. de *a)* y de $A_1$.

*c)* $p \longrightarrow p$.

Sep. de *b)* y de teorema 1

TEOREMA 4:

$$\bar{p} \longrightarrow (p \longrightarrow p).$$

*Prueba:*

*a)* $\bar{p} \longrightarrow (\bar{p} \vee p).$

Sust. de «$p$» por «$\bar{p}$» y de «$q$» por «$p$» en $A_2$.

*b)* $\bar{p} \longrightarrow (p \longrightarrow p).$ Por $D_2$.

TEOREMA 5:

$$\bar{p} \vee p.$$

*Prueba:*

*a)* $p \longrightarrow p.$ Teorema 3.

*b)* $\bar{p} \vee p.$ Por $D_2$.

TEOREMA 6:

$$p \vee \bar{p}.$$

*Prueba:*

*a)* $(\bar{p} \vee p) \longrightarrow (p \vee \bar{p}).$

Sust. de «$p$» por «$\bar{p}$» y de «$q$» por «$p$» en $A_3$.

*b)* $p \vee \bar{p}.$

Sep. de *a)* y de teorema 5.

## 11. Sistemas axiomáticos

El proceso axiomático-deductivo del número anterior consiste en la derivación de teoremas a partir de ciertas proposiciones tautológicas tomadas como axiomas y de unas reglas de inferencia dadas.

Si llamamos *sistema axiomático* al conjunto formado por el cuadro de axiomas y por las reglas de inferencia adoptadas, es obvio que habrá tantos sistemas axiomáticos cuantas parejas «cuadro de axiomas-reglas de inferencia» podamos formular; siempre, claro está,

que se cumpla la triple condición de independencia, consistencia y plenitud.

Fijado un sistema axiomático, llamaremos *demostración de un teorema*

$$P \Longrightarrow Q \tag{1}$$

al proceso mediante el cual la proposición condicional $P \longrightarrow Q$ se deriva del cuadro de axiomas y de los teoremas demostrados con anterioridad, por aplicación de las reglas de inferencia adoptadas.

Ahora bien, como por otra parte sabemos que para demostrar que $P \Longrightarrow Q$ basta con probar que el condicional $P \longrightarrow Q$ es una tautología, resulta que disponemos de dos procedimientos para conseguir la demostración de (1). Es obvio que en cada caso concreto usaremos el camino que más convenga al caso en estudio.

## 12. Formas derivadas de un teorema

Puesto que con las proposiciones $P$ y $Q$ pueden formarse las proposiciones compuestas:

$$P \longrightarrow Q, \quad Q \longrightarrow P, \quad \overline{P} \longrightarrow \overline{Q} \quad \text{y} \quad \overline{Q} \longrightarrow \overline{P};$$

si a estas proposiciones condicionales las llamamos *directa, recíproca, contraria de la directa* y *contraria de la recíproca,* respectivamente, y formamos sus tablas de verdad como a continuación se indica, tendremos:

| $P$ | $Q$ | $\overline{P}$ | $\overline{Q}$ | $P \longrightarrow Q$ | $Q \longrightarrow P$ | $\overline{P} \longrightarrow \overline{Q}$ | $\overline{Q} \longrightarrow \overline{P}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

Ahora bien, como las columnas 5.ª y 8.ª tienen iguales anotaciones, los encabezamientos de estas columnas serán equivalentes (número 6), es decir:

(1) $$P \longrightarrow Q \equiv \overline{Q} \longrightarrow \overline{P}.$$

Análogamente:

(2) $$Q \longrightarrow P \equiv \overline{P} \longrightarrow \overline{Q}$$

o sea:

*a)* La proposición condicional directa es equivalente a su contrarrecíproca.

*b)* La proposición condicional recíproca es equivalente a la contraria de la directa.

De las conclusiones anteriores se sigue que si

$$P \longrightarrow Q, \quad Q \longrightarrow P, \quad \overline{P} \longrightarrow \overline{Q} \text{ y } \overline{Q} \longrightarrow \overline{P}$$

son tautologías y, por tanto,

$$P \Longrightarrow Q, \quad Q \Longrightarrow P, \quad \overline{P} \Longrightarrow \overline{Q} \text{ y } \overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$$

son teoremas, *directo, recíproco, contrario del directo* y *contrario del recíproco, respectivamente,* podremos concluir, análogamente, que:

*c) Los teoremas directo y contrarrecíproco son equivalentes.*

*d) Los teoremas recíproco y contrario del directo son equivalentes.*

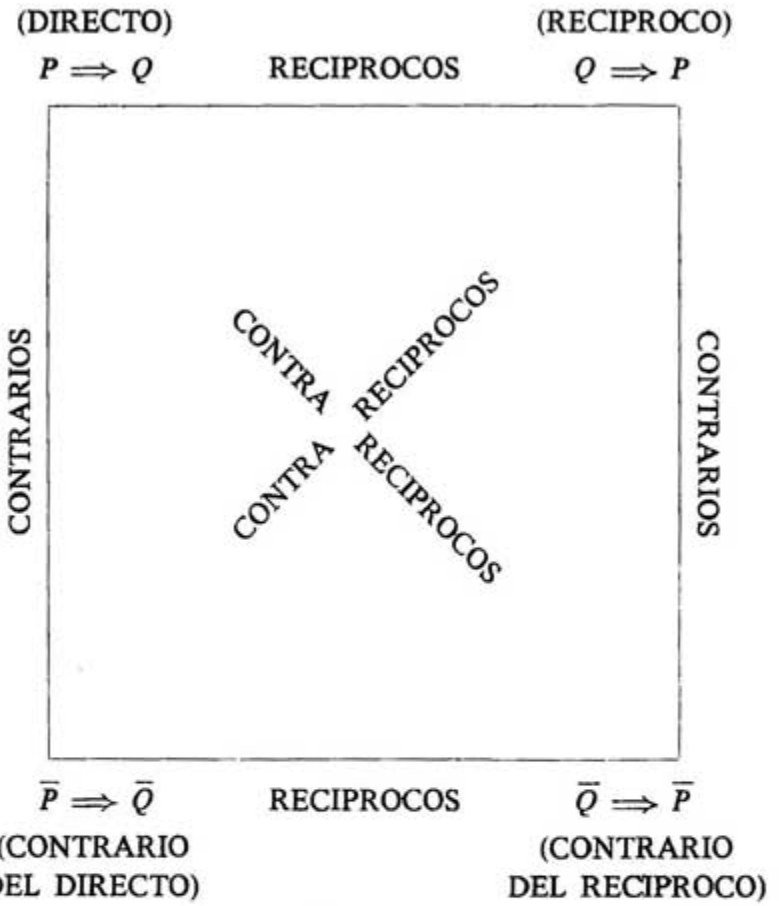
Resumiendo los dos últimos casos en uno, tendremos:

*e) Los teoremas contrarrecíprocos son equivalentes.*

**Relaciones entre un teorema y sus formas derivadas.** Las relaciones existentes entre un teorema

$$P \Longrightarrow Q$$

y sus formas derivadas puede ser esquematizado en la forma siguiente:




Del esquema anterior y de la propiedad *e)* se sigue que:

*f) Para demostrar los cuatro teoremas, basta probar los teoremas situados en dos vértices consecutivos del cuadrado anterior.*

En particular:

*g) Para demostrar los cuatro teoremas, basta probar el directo y el recíproco, o bien el directo y el contrario del directo.*

**Variantes de los teoremas.** Está claro que si en Matemáticas decimos «si $P$ entonces $Q$», nos estamos refiriendo al teorema de hipótesis $P$ y de tesis $Q$.

Ahora bien, como existen diferentes maneras de enunciar los teoremas, es conveniente que examinemos las formas más corrientes que suelen tomar aquéllos.

*a)* El enunciado «$P$ únicamente si $Q$» expresa la misma idea que «si $\bar{Q}$ entonces $\bar{P}$», esto es, que el contrario del recíproco. Mas como, por otra parte, sabemos que el directo y el contrario del recíproco de un teorema son equivalentes, podemos concluir que:

«*P únicamente si Q*»

equivale a

«*si P entonces Q*»,

o sea, al teorema directo.

*b)* Decir que «$P$ es la condición necesaria para $Q$» equivale a «$Q$ únicamente si $P$» y como, en virtud del caso anterior, éste equivale a «si $Q$ entonces $P$», o sea, al recíproco del teorema, tendremos:

«*P es la condición necesaria para Q*»

equivale a

«*si Q entonces P*»,

o sea, al teorema recíproco.

*c)* Que «$P$ es la condición suficiente para $Q$» expresa lo mismo que «si $P$ entonces $Q$», o sea que el directo, y, por tanto:

«*P es la condición suficiente para Q*»

equivale a

«*si P entonces Q*»,

o sea, al teorema directo.

*d)* Finalmente, decir que:

«*P es la condición necesaria y suficiente para Q*»

equivale a

«*si P entonces Q*» y «*si Q entonces P*»,

o sea, a los teoremas directo y recíproco.

Por tanto, para demostrar que «*P* es la condición necesaria y suficiente para *Q*» habrá que demostrar los teoremas directo y recíproco, o bien demostrar *f)*, los teoremas situados en dos vértices consecutivos cualesquiera del cuadrado del esquema anterior.

A veces, para expresar que «*P* es condición necesaria y suficiente para *Q*» escribiremos:

$$P \quad \text{sii} \quad Q$$

**Ejercicios:**

*a)* Hallar las formas derivadas del condicional «si estudio mucho entonces aprobaré».

*Solución:*

RECÍPROCO: «Si apruebo será porque he estudiado mucho».

CONTRARIO DEL DIRECTO: «Si no estudio mucho entonces no aprobaré.»

CONTRARIO DEL RECÍPROCO: «Si no apruebo será porque no he estudiado mucho.»

*b)* Dado el teorema «si un punto está en la mediatriz de un segmento, entonces equidista de sus extremos», se pide:

1.° Hallar sus formas derivadas, y

2.° Establecer las equivalencias a que den lugar el teorema y sus formas derivadas.

*Solución:*

1.° RECÍPROCO: «Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces está en su mediatriz.»

CONTRARIO DEL DIRECTO: «Si un punto no está en la mediatriz de un segmento, entonces no equidista de sus extremos.»

CONTRARIO DEL RECÍPROCO: «Si un punto no equidista de los extremos de un segmento, entonces no está en su mediatriz.»

2.° Los teoremas directo y contrario del recíproco son equivalentes y también lo son el recíproco y el contrario del directo.

*c)* Dadas las proposiciones:

$P \equiv$ Un número entero es divisible por 5, y

$Q \equiv$ Un número entero termina en 5,

se pide:

1.° Formar los condicionales a que dan lugar las proposiciones $P$ y $Q$.

2.° Indicar cuáles de los condicionales son teoremas.

3.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ únicamente si $Q$», o bien «$Q$ únicamente si $P$» es un teorema?

4.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición necesaria para $Q$», o bien «$Q$ es la condición necesaria para $P$» es un teorema?

5.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición suficiente para $Q$», o bien «$Q$ es la condición suficiente para $P$» es un teorema?

6.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición necesaria y suficiente para $Q$», o bien «$Q$ es la condición necesaria y suficiente para $P$» es un teorema?

*Solución:*

1.° DIRECTO: «Si un número entero es divisible por 5, entonces termina en 5.»

RECÍPROCO: «Si un número entero termina en 5, entonces es divisible por 5.»

CONTRARIO DEL DIRECTO: «Si un número entero no es divisible por 5, entonces no termina en 5.»

CONTRARIO DEL RECÍPROCO: «Si un número entero no termina en 5, entonces no es divisible por 5.»

2.° El directo es falso, pues un número entero puede ser divisible por 5 sin terminar en 5; bastaría que terminara en 0.

Al ser falso el directo, también lo será el contrario del recíproco. En cambio, el recíproco y su equivalente, el contrario del directo son verdaderos y, por tanto esos condicionales son teoremas.

3.° «$Q$ únicamente si $P$» es un teorema, puesto que esta proposición es equivalente al teorema «si $Q$ entonces $P$».

4.° «$P$ es la condición necesaria para $Q$» es un teorema, por serlo «si $Q$ entonces $P$».

5.° «$Q$ es la condición suficiente para $P$» es un teorema, por serlo «si $Q$ entonces $P$».

6.° Ninguna de las dos proposiciones es un teorema, por no ser teoremas simultáneamente el directo y el recíproco.

## 13. La demostración por reducción al absurdo

Sabemos que para demostrar un teorema

(1) $$P \Longrightarrow Q$$

basta probar que la proposición condicional

(2) $$P \longrightarrow Q$$

es una tautología (número 6). Pero como, por otra parte, la proposición condicional

(3) $$(P \wedge \overline{Q}) \longrightarrow (R \wedge \overline{R})$$

es equivalente a la (2), como se puede probar fácilmente con la construcción de la tabla de verdad adecuada; podremos sustituir la demostración del teorema (1), por la correspondiente prueba de que el condicional (3) es una tautología.

Ahora bien, como $R \wedge \overline{R}$ es un *absurdo,* o sea falso; para que (3) sea una tautología tendrá que ser $P \wedge \overline{Q}$ falso, y como $P$ es verdad, por ser premisa del teorema (1), $\overline{Q}$ tendrá que ser falso y, por tanto, $Q$ verdad, como se quería demostrar.

De lo anterior podemos concluir que la demostración del teorema (1), puede ser sustituida por la del

$$(P \wedge \overline{Q}) \Longrightarrow (R \wedge \overline{R})$$

y que, por tanto: *Si usando como premisas la hipótesis y la negación de la tesis de un teorema, llegáramos a una conclusión absurda o contradictoria, podremos dar por demostrado el teorema.*

Este tipo de demostración recibe el nombre de *demostración por reducción al absurdo.*

**Ejercicio:**

Demostrar por reducción al absurdo el teorema «Dos rectas $a$ y $b$, paralelas a una tercera $c$, son paralelas entre sí».

*Resolución:*

Si representamos con $P$ y $Q$, respectivamente, las proposiciones «Dos rectas $a$ y $b$ son paralelas a una tercera recta $c$» y «Las rectas $a$ y $b$ son paralelas», entonces $P$ será la hipótesis y $Q$ la tesis del teorema a demostrar

$$P \Longrightarrow Q.$$

Ahora bien, sabemos que la demostración de este teorema puede ser sustituida por la de su equivalente

$$(P \wedge \overline{Q}) \Longrightarrow R \wedge \overline{R},$$

cuya demostración es como sigue: Si las rectas $a$ y $b$ son paralelas a una tercera $c$, y las rectas $a$ y $b$ no fueran paralelas, esto es, se cortaran en un punto, desde este punto podríamos trazar dos paralelas a $c$, lo cual es absurdo (falso).

## 14. Inducción matemática

Dada la sucesión de proposiciones

(1) $$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

y supuesto que hemos demostrado que:

*a)* La proposición $P_1$ es verdadera.

*b)* Si una proposición cualquiera $P_h$ es verdadera, también lo es la *siguiente* $P_{h+1}$.

En las anteriores premisas vamos a demostrar que todas las proposiciones de (1) son verdaderas.

En efecto, si no fueran verdaderas todas las proposiciones de (1), habría una *primera* $P_k$ que sería falsa y, por tanto, su *anterior* $P_{k-1}$ sería verdadera. Ahora bien, al ser $P_{k-1}$ verdadera, en virtud de *b)*, también lo sería $P_k$; con lo cual llegaríamos a que la proposición $P_k$ es simultáneamente verdadera y falsa, lo cual es absurdo (número 13). Este tipo de demostración recibe el nombre de *demostración por el método de inducción completa.*

NOTA. Por razones de brevedad, y dado lo intuitivo de las nociones de «siguiente», «primero» y «anterior», las hemos empleado sin establecerlas previamente.

**Ejercicio:**

Demostrar por el método de inducción completa que

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(1+n)n}{2}$$

*Resolución:*

Para demostrar la fórmula anterior bastará con probar que son verdaderas las proposiciones

(1) $$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots,$$

siendo $P_n$ la proposición

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(1+n)\cdot n}{2}.$$

Ahora bien:

*a)* $P_1$ es verdadera, puesto que

$$1=\frac{(1+1)\cdot 1}{2}.$$

*b)* Si suponemos ahora que $P_h$ es verdadera, esto es, que se verifica la igualdad

$$1+2+3+\ldots+h=\frac{(1+h)\cdot h}{2} \tag{2}$$

vamos a demostrar que, entonces, la proposición $P_{h+1}$ también tiene que ser verdadera.

En efecto, si a los dos miembros de la igualdad (2) le sumamos $h+1$, tendremos:

$$1+2+3+\ldots+h+(h+1)=\frac{(1+h)\cdot h}{2}+(h+1),$$

de donde

$$1+2+3+\ldots+h+(h+1)=\frac{[1+(h+1)]\cdot(h+1)}{2}$$

y como esta proposición es precisamente la $P_{h+1}$, queda probado que de ser cierta la proposición $P_h$ lo es la siguiente, $P_{h+1}$.

De *a)* y *b)* se sigue, en virtud de (14), que todas las proposiciones (1) son verdaderas o, lo que es lo mismo, que la fórmula en estudio es correcta.

## EJERCICIOS RESUELTOS

**1.** Si $p$ significa «Juan es inteligente» y $q$ «Jaime es tonto», se pide expresar simbólicamente las proposiciones siguientes:

*a)* «Juan no es inteligente»;

*b)* «Juan es inteligente y Jaime es tonto»;

*c)* «Juan es inteligente y Jaime no es tonto»;

*d)* «Juan no es inteligente y Jaime es tonto»;

*e)* «Juan no es inteligente y Jaime no es tonto»;

*f)* «Ni Juan ni Jaime son inteligentes»;

*g)* «Juan y Jaime son tontos»;

*h)* «No es cierto que Juan y Jaime sean ambos inteligentes»;

*i)* «Juan no es inteligente, pero Jaime no es tonto».

*Solución:*

*a)* $\bar{p}$, *b)* $p \wedge q$, *c)* $p \wedge \bar{q}$,

*d)* $\bar{p} \wedge q$, *e)* $\bar{p} \wedge \bar{q}$, *f)* $\bar{p} \wedge q$,

*g)* $\bar{p} \wedge q$, *h)* $p \wedge q$ ó $\bar{p} \wedge q$ ó $\bar{p} \wedge \bar{q}$, *i)* $\bar{p} \wedge \bar{q}$.

**2.** Si $p$ significa «hace frío» y $q$ «está nublado», se pide expresar simbólicamente las proposiciones siguientes:

*a)* «Hace frío o está nublado»;

*b)* «Hace frío y está despejado»;

*c)* «No hace frío o no está nublado»;

*d)* «O hace frío o está nublado»;

*e)* «No es cierto que haga frío»;

*f)* «No es cierto que no esté nublado»;

*g)* «O no hace frío o no está nublado»;

*h)* «No es cierto que haga frío o que esté nublado».

*Solución:*

*a)* $p \vee q$, *b)* $p \wedge \bar{q}$, *c)* $\bar{p} \vee \bar{q}$,
*d)* $p \underline{\vee} q$, *e)* $\bar{p}$, *f)* $q$,
*g)* $\bar{p} \underline{\vee} \bar{q}$, *h)* $\bar{p} \wedge \bar{a}$.

**3.** Si $p$ significa «Juan dice siempre la verdad» y $q$ «Jaime siempre miente», se pide expresar simbólicamente las proposiciones siguientes:

*a)* «Juan o Jaime dicen la verdad»;

*b)* «No es cierto que Juan o Jaime digan siempre mentiras»;

*c)* «Si Juan dice la verdad, entonces Jaime miente»;

*d)* «Si Juan miente, entonces Jaime dice la verdad»;

*e)* «Juan miente si, y sólo si, Jaime dice la verdad»;

*f)* «Jaime dice la verdad si, y sólo si, Juan miente;

*g)* «No es cierto que si Juan miente, entonces Jaime diga siempre la verdad».

*Solución:*

*a)* $p \vee \bar{q}$, *b)* $(\bar{p} \vee q)'$, *c)* $p \longrightarrow q$,
*d)* $\bar{p} \longrightarrow \bar{q}$, *e)* $\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q}$,
*f)* $\bar{q} \longleftrightarrow \bar{p}$, *g)* $(\bar{p} \longrightarrow \bar{q})'$.

**4.** Si $p$ significa «Juan es europeo» y $q$ «Jaime es americano», se pide expresar verbalmente cada una de las proposiciones siguientes:

*a)* $p \wedge q$, *b)* $\bar{p} \wedge q$, *c)* $p \vee q$,
*d)* $p \underline{\vee} \bar{q}$, *e)* $(p \wedge \bar{q})'$, *f)* $(p')'$,
*g)* $(\bar{p} \vee \bar{q})'$, *h)* $p \longrightarrow \bar{q}$, *i)* $\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q}$,
*j)* $(\bar{q} \longrightarrow p)'$.

*Solución:*

*a)* «Juan es europeo y Jaime es americano»;

*b)* «Juan no es europeo y Jaime es americano»;

*c)* «Juan es europeo o Jaime es americano»;

*d)* «O Juan es europeo o Jaime no es americano»;

*e)* «No es cierto que Juan sea europeo y Jaime no sea americano»;

*f)* «No es cierto que no sea Juan europeo»;

*g)* «No es cierto que Juan no sea europeo o que Jaime no sea americano»;

*h)* «Si Juan es europeo, entonces Jaime no es americano»;

*i)* «Juan no es europeo si, y sólo si, Jaime no es americano;

*j)* «No es cierto que si Jaime no es americano entonces Juan sea europeo».

**5.** Constrúyase la tabla de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

*a)* $p \vee \bar{p}$, *b)* $(p \wedge q)'$, *c)* $(p \vee q) \vee \bar{p}$,

*d)* $(p \longrightarrow q)'$, *e)* $(p \longrightarrow q) \vee \bar{p}$, *f)* $(p \longleftrightarrow q) \wedge \bar{q}$,

*g)* $(p \longrightarrow \bar{q})'$, *h)* $p \vee (\bar{p} \longleftrightarrow q)$, *i)* $(\bar{p} \longrightarrow \bar{q}) \wedge p$.

*Solución:*

*a)*

| $p$ | $\bar{p}$ | $p \vee \bar{p}$ |
|---|---|---|
| *V* | *F* | *V* |
| *F* | *V* | *V* |

*b)*

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q)'$ |
|---|---|---|---|
| *V* | *V* | *V* | *F* |
| *V* | *F* | *F* | *V* |
| *F* | *V* | *F* | *V* |
| *F* | *F* | *F* | *V* |

c)

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $p \vee q$ | $(p \vee q) \vee \bar{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |

d)

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q)'$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |

e)

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $p \rightarrow q$ | $(p \rightarrow q) \vee \bar{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

*f)*

| $p$ | $q$ | $\bar{q}$ | $p \leftrightarrow q$ | $(p \leftrightarrow q) \wedge \bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | F |
| V | F | V | F | F |
| F | V | F | F | F |
| F | F | V | V | V |

*g)*

| $p$ | $q$ | $\bar{q}$ | $p \rightarrow \bar{q}$ | $(p \rightarrow \bar{q})'$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V |
| V | F | V | V | F |
| F | V | F | V | F |
| F | F | V | V | F |

*h)*

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{p} \leftrightarrow q$ | $p \vee (\bar{p} \leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | F | F |

*i)*

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \longrightarrow \bar{q}$ | $(\bar{p} \longrightarrow \bar{q}) \wedge p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |

**6.** Constrúyase las tablas de verdad de las proposiciones siguientes:

*a)* $(p \vee r) \wedge (p \longrightarrow q)$;

*b)* $(p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee r)$;

*c)* $(p \longrightarrow q) \wedge (r \longleftrightarrow \bar{p})$;

*d)* $(\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q}) \vee (r \longrightarrow q)$.

*Solución:*

*a)*

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee r$ | $p \longrightarrow q$ | $(p \vee r) \wedge (p \longrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |

b)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $q \vee r$ | $(p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V |
| V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V |
| F | F | V | F | V | F |
| F | F | F | F | F | V |

c)

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{p}$ | $p \longrightarrow q$ | $r \longleftrightarrow \bar{p}$ | $(p \longrightarrow q) \wedge (r \longleftrightarrow \bar{p})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V | F | F |
| V | V | F | F | V | V | V |
| V | F | V | F | F | F | F |
| V | F | F | F | F | V | F |
| F | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | F | F |

*d)*

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q}$ | $r \longrightarrow q$ | $(\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q}) \vee (r \longrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | V | V | V |
| V | V | F | F | F | V | V | V |
| V | F | V | F | V | F | F | F |
| V | F | F | F | V | F | V | V |
| F | V | V | V | F | F | V | V |
| F | V | F | V | F | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V | F | V |
| F | F | F | V | V | V | V | V |

**7.** Si $p$, $q$ y $r$ son proposiciones atómicas distintas, determínese por medio de tablas de verdad cuáles de las proposiciones compuestas siguientes son tautologías:

*a)* $p \vee q$;

*b)* $p \vee \bar{p}$;

*c)* $(p \vee q) \longrightarrow (q \vee p)$;

*d)* $p \longrightarrow [(p \vee q) \vee r]$;

*e)* $p \longrightarrow (\bar{p} \longrightarrow q)$;

*f)* $(p \longrightarrow q) \longrightarrow p$;

*g)* $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (q \longrightarrow p)$;

*h)* $[(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow q] \longrightarrow p$.

*Solución:*

*b), c), d)* y *e).*

**8.** Si $p$ y $q$ son dos proposiciones diferentes, determínese cuál de las proposiciones siguientes es implicada por la proposición $p \wedge q$:

*a)* $p$; *b)* $q \rightarrow p$; *c)* $p \rightarrow q$;
*d)* $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$; *e)* $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$; *f)* $\bar{p} \wedge \bar{q}$;
*g)* $p \wedge \bar{q}$.

*Solución:*

*a), b), c), d)* y *e).*

**9.** Si $p$ y $q$ son dos proposiciones diferentes, ¿cuál de las proposiciones siguientes es equivalente a la proposición $p$?:

*a)* $p \wedge q$; *b)* $p \vee q$; *c)* $p \wedge \bar{p}$;
*d)* $p \vee \bar{p}$; *e)* $p \wedge p$; *f)* $p \vee p$;
*g)* $p \rightarrow p$; *h)* $p \rightarrow \bar{p}$.

*Solución:*

*e)* y *f).*

**10.** ¿Existe una proposición $p$, tal que $p \wedge \bar{p}$ sea una tautología?

*Solución:*

Como, cualquiera que sea la proposición $p$, la última columna (tercera) de la tabla de verdad de $p \wedge \bar{p}$ contiene efes solamente, dicha proposición es una contradicción y no una tautología.

**11.** Constrúyase un enunciado compuesto equivalente a $p \leftrightarrow q$ usando únicamente las conectivas $\wedge$, $\vee$ y $-$.

*Solución:*

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p).$$

**12.** Constrúyase un enunciado compuesto equivalente a $p \vee q$ usando únicamente las conectivas $\wedge$ y $-$.

*Solución:*

$$p \vee q = (\bar{p})' \vee (\bar{q})' = (\bar{p} \wedge \bar{q})'.$$

**13.** Constrúyase un enunciado compuesto equivalente a $p \longleftrightarrow q$ usando únicamente las conectivas $\vee$ y $-$.

*Solución:*

$$p \longleftrightarrow q \equiv (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p) \equiv [(\bar{p} \vee q)' \vee (\bar{q} \vee q)']'.$$

**14.** Si $p$ es una proposición verdadera, demuéstrese que:

*a)* $p \vee q$ es una tautología;

*b)* $\bar{p} \wedge q$ es una contradicción;

*c)* $p \wedge q$ es equivalente a $q$;

*d)* $\bar{p} \vee q$ es equivalente a $q$.

*Solución:*

Construyendo las tablas de verdad correspondientes y teniendo en cuenta que la proposición $p$ solamente toma el valor $V$ (verdadero), tendremos:

| $p$ | $q$ | $\bar{p}$ | $p \vee q$ | $\bar{p} \wedge q$ | $p \wedge q$ | $\bar{p} \vee q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |

Las tablas obtenidas nos prueban la certeza de:

*a)* Por contener sólo uves la cuarta columna.

*b)* Por contener sólo efes la quinta columna.

*c)* Por contener las mismas anotaciones las columnas sexta y segunda; y

*d)* Por contener las mismas anotaciones las columnas séptima y segunda.

**15.** Si $p$ y $q$ son contradicciones y $r$ es una tautología, ¿qué será la proposición $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee r$?

*Solución:*

La tabla de verdad siguiente nos prueba que la proposición dada es una tautología.

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{p}$ | $\bar{q}$ | $\bar{p} \wedge \bar{q}$ | $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

**16.** Demuéstrese que la negación de la negación de una proposición $p$ es ésta.

*Solución:*

La tabla de verdad siguiente nos prueba la equivalencia de $p$ y de $(p')'$ y que, por tanto, $(p')'=p$.

| $p$ | $p'$ | $(p')'$ |
|---|---|---|
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |

**17.** Hallar las formas derivadas del condicional «si me tocara la lotería entonces me compraría un apartamento».

*Solución:*

RECÍPROCO: «Si me comprara un apartamento sería porque me había tocado la lotería.»

CONTRARIO DEL DIRECTO: «Si no me toca la lotería, entonces no me compraré un apartamento.»

CONTRARIO DEL RECÍPROCO: «Si no me compro un apartamento es porque no me ha tocado la lotería.»

**18.** Dado el teorema: «Si un triángulo tiene dos lados iguales, entonces los ángulos opuestos a dichos lados deben ser también iguales», se pide:

1.° Hallar sus formas derivadas; y

2.° Establecer las equivalencias a que den lugar el teorema y sus formas derivadas.

*Solución:*

1.° RECÍPROCO: «Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, entonces los lados opuestos a dichos ángulos tendrán que ser iguales.»

CONTRARIO DEL DIRECTO: «Si un triángulo tiene dos lados desiguales, entonces los ángulos opuestos a dichos lados tendrán que ser desiguales.»

CONTRARIO DEL RECÍPROCO: «Si un triángulo tiene dos ángulos desiguales, entonces los lados opuestos a dichos ángulos tendrán que ser desiguales.»

2.° Los teoremas directo y contrario del recíproco son equivalentes y también lo son el recíproco y el contrario del directo; es decir, los teoremas contrarrecíprocos entre sí son equivalentes.

NOTA. Del caso 2.° se sigue que, para demostrar los cuatro teoremas, basta probar:

*a)* Directo y recíproco;

*b)* Directo y contrario del directo;

*c)* Recíproco y contrario del recíproco, o bien,

*d)* Contrario del directo y contrario del recíproco.

Importa mucho observar que lo dicho en esta nota es aplicable a cualquier teorema (número 12).

**19.** Dadas las proposiciones:

$P \equiv$ una división está bien hecha

y

$Q \equiv$ el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto,

se pide:

1.° Formar los condicionales a que dan lugar las proposiciones $P$ y $Q$;

2.° Indicar cuáles de los condicionales son teoremas;

3.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ únicamente si $Q$», o bien «$Q$ únicamente si $P$» es un teorema?

4.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición necesaria para $Q$», o bien «$Q$ es la condición necesaria para $P$», es un teorema?

5.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición suficiente para $Q$», o bien «$Q$ es la condición suficiente para $P$» es un teorema?

6.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición necesaria y suficiente para $Q$», o bien «$Q$ es la condición necesaria y suficiente para $P$» es un teorema?

*Solución:*

1.° DIRECTO: «Si una división está bien hecha, entonces el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.»

RECÍPROCO: «Si, en una división, el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto, entonces la división está bien hecha.»

CONTRARIO DEL DIRECTO: «Si una división no está bien hecha, entonces el dividendo no es igual al divisor por el cociente más el resto.»

CONTRARIO DEL RECÍPROCO: «Si en una división el dividendo no es igual al divisor por el cociente más el resto, entonces la división no está bien hecha.»

2.° El recíproco es falso, pues no basta que en una división el dividendo sea igual al divisor por el cociente más el resto, para poder afirmar que la división está bien hecha; es necesario que, además, el resto sea menor que el divisor.

Al ser falso el recíproco, también lo será el contrario del directo.

En cambio, el directo y su equivalente, el contrario del recíproco, son verdaderos y, por tanto, esos condicionales son teoremas.

3.° «$P$ únicamente si $Q$» es un teorema, puesto que esta proposición es equivalente al teorema «si $P$ entonces $Q$».

4.° «$Q$ es la condición necesaria para $P$» es un teorema, por serlo «si $P$ entonces $Q$».

5.° «$P$ es la condición suficiente para $Q$» es un teorema, por serlo «si $P$ entoces $Q$».

6.° Ninguna de las dos proposiciones es un teorema, por no ser teoremas simultáneamente el directo y el recíproco.

**20.** Demostrar por reducción al absurdo el teorema «En el supuesto de que $x$ e $y$ sean dos números enteros positivos, si el producto $x \cdot y$ es impar, entonces $x$ e $y$ deben ser ambos impares».

*Solución:*

Si representamos con $P$ y $Q$, respectivamente, las proposiciones «El producto $x \cdot y$ es impar» y «Los números $x$ e $y$ son ambos impares», entonces $P$ y $Q$ serán la hipótesis y la tesis, respectivamente, del teorema a demostrar:

$$P \Longrightarrow Q.$$

Ahora bien, por el número 13, sabemos que la demostración de este teorema puede ser sustituida por la de su equivalente

$$(P \wedge \overline{Q}) \Longrightarrow R \wedge \overline{R},$$

cuya demostración es como sigue:

Si el producto $x \cdot y$ es impar y no fueran sus dos factores impares, entonces uno de ellos o ambos serían pares.

Si suponemos, por ejemplo, que $x$ es par, se tendría:

$$x = \dot{2}$$

y, por tanto,

$$x \cdot y = \dot{2} \cdot y,$$

esto es,

$$x \cdot y = \text{número par.}$$

Conclusión que unida a la hipótesis nos permite afirmar que el producto $x \cdot y$ es impar y par simultáneamente, lo cual es absurdo (falso).

Por supuesto que si hubiéramos partido de que los dos factores eran pares habríamos llegado a la misma conclusión.

NOTA. En la práctica, para demostrar un teorema por reducción al absurdo basta partir de la hipótesis y de la negación de la tesis hasta conseguir una proposición contradictoria.

**21.** Demostrar por reducción al absurdo el teorema «Si una recta $a$ corta a otra $b$ y ésta es paralela a una tercera recta $c$, entonces $a$ corta a $c$».

*Solución:*

En efecto, si la recta $a$ no cortara a $c$, sería paralela a ella y entonces por el punto de intersección de las rectas $a$ y $b$ habría dos paralelas a $c$, lo cual es absurdo.

**22.** Demostrar por el método de inducción completa que

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

*Solución:*

Para demostrar la fórmula anterior bastará con probar que son verdaderas las proposiciones

(1) $$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots,$$

siendo $P_n$ la proposición

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Ahora bien:

*a)* $P_1$ es verdadera, puesto que

$$1=1^2.$$

*b)* Si suponemos ahora que $P_h$ es verdadera, esto es, que se verifica la igualdad

(2) $$1+3+5+7+\ldots+(2h-1)=h^2$$

vamos a demostrar que, entonces, la proposición $P_{h+1}$ también tiene que ser verdadera.

En efecto, si a los dos miembros de la igualdad (2) le sumamos $2h+1$, tendremos:

$$1+3+5+7+\ldots+(2h-1)+(2h+1)=h^2+2h+1,$$

de donde

$$1+3+5+7+\ldots+(2h-1)+(2h+1)=(h+1)^2$$

y como esta proposición es precisamente la $P_{h+1}$, queda probado que de ser cierta la proposición $P_h$ lo es la siguiente, $P_{h+1}$.

De *a)* y *b)* se sigue, en virtud del número 14, que todas las proposiciones (1) son verdaderas, o, lo que es lo mismo, que la fórmula en estudio es correcta.

NOTA. Por razones de brevedad, en la práctica suelen omitirse alguno de los pasos teóricos dados en el ejercicio anterior, sin que esto vaya en menoscabo del rigor; pues, por supuesto, los pasos saltados se dan por sobreentendidos.

**23.** Demostrar, por el método de inducción completa, que

$$(1) \qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

para todo valor de $n$.

*Solución:*

*a)* En efecto, la fórmula (1) es cierta para $n=1$, puesto que

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}.$$

Si suponemos ahora que (1) es cierta para $n=h$, esto es, que se verifica la identidad

$$(2) \qquad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{h\cdot(h+1)}=\frac{h}{h+1}$$

vamos a demostrar ahora que, entonces, la fórmula (1) también es cierta para $n=h+1$. En efecto, si a los dos miembros de la identidad (2) le sumamos la fracción

$$\frac{1}{(h+1)\cdot(h+2)}$$

tendremos la nueva identidad

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{h\cdot(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=$$

$$=\frac{h}{h+1}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}.$$

Ahora bien, como

$$\frac{h}{h+1}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h(h+2)+1}{(h+1)(h+2)}=$$

$$\frac{(h+1)^2}{(h+1)(h+2)}=\frac{h+1}{h+2}$$

dicha identidad puede ser escrita en la forma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{h\cdot(h+1)}+\frac{1}{(h+1)(h+2)}=\frac{h+1}{h+2}$$

y como la identidad obtenida es la (1), cuando se sustituye la variable $n$ por el número $h+1$ queda probado que:

*b)* Si la fórmula (1) es cierta para un valor cualquiera de $n$, también lo es para el siguiente.

Luego la repetida fórmula (1) es cierta para todo valor de $n$.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1.** Los enunciados siguientes son proposiciones compuestas. Determínense las proposiciones simples que las integran.

*a)* La nieve es blanca y el acero es un metal.

*b)* Juan es inteligente o es trabajador.

*c)* Juan y José fueron al cine.

*d)* Hace sol, pero está lloviendo.

*e)* José fue al cine y después se fue a la cama.

*f)* Pedro no es estudioso y, sin embargo, es economista.

**2.** Si $p$ significa «la producción de trigo aumenta» y $q$ significa «el precio del pan aumenta», se pide expresar simbólicamente las proposiciones siguientes:

*a)* «La producción de trigo permanece estacionaria».

*b)* «La producción de trigo aumenta y el precio del pan disminuye».

*c)* «La producción del trigo disminuye o el precio del pan disminuye».

*d)* «Si la producción del trigo aumenta, entonces el precio del pan disminuye».

*e)* «El precio del pan disminuye si, y sólo si, la producción del trigo aumenta».

*f)* «La producción del trigo aumenta o el precio del pan pan aumenta».

*g)* «Si la producción de trigo aumenta, entonces el precio del pan aumenta».

*h)* «Si la producción de trigo disminuye, entonces el precio del pan disminuye».

*i)* «La producción de trigo disminuye o el precio del pan aumenta».

*j)* «No es cierto que el precio del pan disminuya».

**3.** Expresar las proposiciones compuestas siguientes, en forma simbólica, usando las letras $p$, $q$, $r$, ..., en lugar de las proposiciones atómicas que integren cada proposición compuesta:

*a)* «O el barco se hundió por causa de un temporal o porque estaba mal construido o porque chocó con algo».

*b)* «Si los chinos son amarillos y los alemanes tienen los pies grandes, entonces los cubanos son calvos».

*c)* «Juan es inteligente y Pedro es estudioso».

*d)* «Si a las ranas les gusta el agua, entonces a las hormigas les gusta el vino».

*e)* A los elefantes les gusta bailar la rumba o a las tortugas les gusta la velocidad».

*f)* «A los monos les gustan las bananas pero a los leones no».

**4.** Si $p$ significa «Margarita es alta» y $q$ significa «Margarita es estudiosa», se pide expresar simbólicamente las proposiciones siguientes:

*a)* «Margarita es alta y estudiosa».

*b)* «No es cierto que Margarita sea baja o estudiosa».

*c)* «Margarita es alta pero no es estudiosa».

*d)* «Margarita es baja o es alta y estudiosa».

*e)* «Margarita no es ni estudiosa ni alta».

*f)* «No es cierto que Margarita sea estudiosa ni alta».

**5.** Si $p$ significa «hace sol» y $q$ significa «está lloviendo», se pide expresar verbalmente cada una de las proposiciones siguientes:

*a)* $p \vee q$; *b)* $p \wedge q$; *c)* $p \wedge \bar{q}$;

*d)* $\bar{p} \vee q$; *e)* $\bar{p} \wedge \bar{q}$; *f)* $(q')'$;

*g)* $(\bar{p} \vee \bar{q})'$; *h)* $p \longrightarrow \bar{q}$; *i)* $(p \longrightarrow q)'$;

*j)* $(\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q})'$; *k)* $(\bar{p} \longrightarrow q)'$.

**6.** Si $p$ significa «hace sol», $q$ significa «está lloviendo» y $r$ significa «hay humedad», se pide expresar verbalmente cada una de las proposiciones siguientes:

*a)* $(p \wedge q) \vee r$;

*b)* $p \vee (q \wedge r)$;

*c)* $p \rightarrow (q \vee r)$;

*d)* $(p \leftrightarrow q) \vee \bar{r}$;

*e)* $\bar{p} \rightarrow (q \wedge \bar{r})$;

*f)* $[\bar{p} \wedge (\bar{q} \vee r)]'$;

*g)* $(\bar{p} \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{r} \vee \bar{p})$;

*h)* $[r \rightarrow (\bar{q} \rightarrow p)]'$;

*i)* $(p \vee \bar{q}) \rightarrow (\bar{q} \wedge r)$;

*j)* $(\bar{r} \leftrightarrow \bar{p}) \rightarrow (\bar{q} \leftrightarrow r)$;

*k)* $[p \wedge (p \rightarrow r)] \vee [q \wedge (r \rightarrow p)]$.

**7.** Constrúyase la tabla de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

*a)* $\bar{p} \wedge p$;

*b)* $(p \wedge p)'$;

*c)* $(p \vee q)'$;

*d)* $(p \vee \bar{q})'$;

*e)* $(p \rightarrow q) \wedge p$;

*f)* $p \vee (q \rightarrow p)$;

*g)* $p \wedge (p \leftrightarrow q)$;

*h)* $(p \leftrightarrow \bar{q}) \vee q$;

*i)* $(\bar{p} \leftrightarrow q) \wedge (\bar{q} \leftrightarrow p)$;

*j)* $[(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)]'$;

*k)* $[(q \leftrightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)]'$.

**8.** Constrúyase la tabla de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

*a)* $p \wedge (q \vee r)$;

*b)* $(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$;

*c)* $\bar{p} \longrightarrow (q \vee r)$;

*d)* $(p \longleftrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r)$;

*e)* $[(p \wedge \bar{q}) \longleftrightarrow (r \vee p)]'$;

*f)* $(\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q}) \longleftrightarrow (\bar{q} \longleftrightarrow \bar{r})$;

*g)* $(p \longrightarrow r) \longrightarrow (r \longrightarrow q)$;

*h)* $(p \wedge q) \wedge [(\bar{p} \longrightarrow q) \vee (\bar{q} \longrightarrow r)]$;

*i)* $p \vee (q \wedge r)$;

*j)* $(p \wedge q) \longrightarrow [(p \longrightarrow r) \vee (r \longrightarrow p)]$;

*k)* $p \longrightarrow (q \wedge \bar{r})$.

**9.** Verificar por tablas de verdad las equivalencias siguientes:

*a)* $(p \wedge q)' \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$;

*b)* $(p \vee q)' \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$;

*c)* $(p \longrightarrow q)' \equiv p \wedge \bar{q}$;

*d)* $(p \longleftrightarrow q)' \equiv p \longleftrightarrow \bar{q}$;

*e)* $(p \longleftrightarrow q)' \equiv \bar{p} \longleftrightarrow q$.

**10.** Haciendo uso de las equivalencias del número anterior, simplificar las siguientes proposiciones:

*a)* $(p \vee \bar{q})'$; *b)* $(\bar{p} \wedge q)'$;

*c)* $(p \longrightarrow \bar{q})'$; *d)* $(\bar{p} \vee \bar{q})'$;

*e)* $(p \longleftrightarrow \bar{q})'$; *f)* $(\bar{p} \longrightarrow \bar{q})'$;

*g)* $(\bar{p} \longleftrightarrow \bar{q})'$.

**11.** Haciendo uso de las equivalencias del número 9, simplificar los enunciados siguientes:

*a)* No es verdad que hace frío y está nublado.

*b)* No es verdad que los alemanes son altos o las vacas dan leche.

*c)* No es verdad que los monos son inquietos implica que los elefantes vuelan.

*d)* No es verdad que la leche es blanca si, y sólo si, el carbón es negro.

**12.** Si $p$, $v$ y $f$ son, respectivamente, una proposición, tautología y contradicción cualesquiera, probar las equivalencias siguientes:

*a)* $p \vee v \equiv v$; *b)* $p \vee f \equiv p$;

*c)* $p \wedge v \equiv p$, y *d)* $p \wedge f \equiv f$.

**13.** Simplificar las proposiciones siguientes:

*a)* $\bar{p} \vee (p \wedge q)$; *b)* $p \vee (p \wedge q)$;

*c)* $(p \wedge q)' \wedge (\bar{p} \vee q)$; *d)* $(p \vee q)' \vee (\bar{p} \wedge q)$.

**14.** Determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes:

*a)* Si $2 < 5$ entonces $8 > 3$.

*b)* Si $3 = 7$ entonces $4 = 2 + 2$.

*c)* No es cierto que $2 + 3 = 5$ ó $3 + 4 = 9$.

*d)* No es cierto que si $3 + 4 = 2$ entonces $3 = 2 + 1$.

*e)* $2 < 4$ si, y sólo si, $7 < 3$.

*f)* $4 < 5$ implica $8 < 3$.

*g)* $3 + 2 > 1$ equivale a $2 > 5$.

*h)* No es cierto que $4 + 3 = 7$ implica $6 = 2 + 4$.

*i)* No es cierto que $2 + 1 < 5$ equivale a $4 = 3 + 1$.

**15.** Clasifíquense las proposiciones siguientes como: T) tautología; C) contradicción, y N) ninguna de las dos anteriores:

*a)* $p \longleftrightarrow p$;

*b)* $p \longrightarrow \bar{p}$;

*c)* $p \wedge q \equiv q \vee p$;

*d)* $p \equiv \bar{p}$;

*e)* $(p \vee q) \longrightarrow (q \wedge p)$;

*f)* $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \wedge (p \longrightarrow r)'$;

*g)* $(p \longrightarrow q) \longrightarrow p$;

*h)* $p \longrightarrow (p \longrightarrow q)$;

*i)* $p \longleftrightarrow (p \longleftrightarrow q)$;

*j)* $[(p \longrightarrow q) \longrightarrow p] \longrightarrow p$;

*k)* $(p \wedge q) \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow p)$.

**16.** Arregle las proposiciones siguientes en un orden tal que cada proposición implique a las siguientes:

*a)* $\bar{p} \longleftrightarrow q$; *b)* $p \longrightarrow (\bar{p} \longrightarrow q)$;

*c)* $[p \longrightarrow (q \longrightarrow p)]'$; *d)* $p \vee q$; *e)* $\bar{p} \wedge q$.

**17.** Verifique si en las proposiciones siguientes hay implicaciones y equivalencias.

*a)* $p \wedge q$; *b)* $\bar{p} \vee \bar{q}$; *c)* $p \wedge \bar{q}$;

*d)* $p \longrightarrow \bar{q}$; *e)* $\bar{p} \vee q$.

**18.** Si $p$, $q$ y $r$ son, respectivamente, verdadero, verdadero y falso, ¿cuál será el valor de verdad de $(p \vee \bar{q}) \wedge \bar{r}$?

**19.** Demuéstrese que una proposición que implique a su negación es una contradicción.

**20.** Demuéstrese que una proposición compuesta verdadera está implicada por cada una de las proposiciones atómicas que la integran.

**21.** Siendo

$P$ = Caracas es mayor que Maracaibo;

$Q$ = Caracas está al norte de Valencia;

$R$ = Maracaibo es mayor que Caracas

($P$ y $Q$ son verdaderas y $R$ falsa).

Determinar cuáles de las proposiciones siguientes son verdaderas:

*a)* $P \vee R$;

*b)* $P \wedge R$;

*c)* $P \wedge Q$;

*d)* $\bar{P} \wedge \bar{Q}$;

*e)* $P \vee Q$;

*f)* $P \longleftrightarrow \bar{Q} \vee R$;

*g)* $Q \vee \bar{R} \longrightarrow P$;

*h)* $(Q \vee P) \longrightarrow (Q \longrightarrow \bar{P})$;

*i)* $(Q \longleftrightarrow \bar{P}) \longleftrightarrow (P \longleftrightarrow R)$;

*j)* $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow (Q \wedge R)$;

*k)* $(Q \longrightarrow P) \longrightarrow [(P \longrightarrow \bar{R}) \longrightarrow (\bar{R} \longrightarrow Q)]$.

**22.** Sea $P$ una proposición tal que, para cualquier proposición $Q$, la $P \vee Q$ es verdadera. ¿Qué puede decirse sobre el valor de verdad de $P$?

**23.** Si $P \longleftrightarrow Q$ es verdadera, ¿qué puede decirse sobre el valor de verdad de $P \vee \bar{Q}$?

**24.** Si $P$ y $Q$ son proposiciones distintas, ¿cuáles de las proposiciones siguientes son tautologías?

*a)* $P \longleftrightarrow Q$;

*b)* $P \longleftrightarrow P \vee P$;

*c)* $P \vee Q \longleftrightarrow Q \vee P$;

*d)* $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow (Q \longrightarrow P)$;

*e)* $(P \longleftrightarrow P) \longleftrightarrow P$.

**25.** Hallar las formas derivadas de los condicionales siguientes:

*a)* «Si hoy llueve iré al cine»;

*b)* «Si hoy brilla el sol saldré de paseo»;

*c)* «Si el costo de la vida sigue ascendiendo, el gobierno tomará medidas enérgicas»;

*d)* «Si la producción de petróleo aumenta, entonces el transporte por carretera se abarata».

*e)* «Si las vacas dan leche, entonces los gatos producen petróleo»;

*f)* «Si la nieve es negra, entonces el carbón es blanco».

**26.** Siendo $P$ y $Q$ las proposiciones que a continuación se indican, se pide:

1.° Formar las condicionales a que den lugar $P$ y $Q$.

2.° Indicar cuáles de los condicionales son teoremas.

3.° ¿Cuáles de las proposiciones «$P$ únicamente si $Q$», o bien «$Q$ únicamente si $P$» es un teorema?

4.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición necesaria para $Q$», o bien «$Q$ es la condición necesaria para $P$» es un teorema?

5.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición suficiente para $Q$», o bien «$Q$ es la condición suficiente para $P$» es un teorema?

6.° ¿Cuál de las proposiciones «$P$ es la condición necesaria y suficiente para $Q$», o bien «$Q$ es la condición necesaria y suficiente para $P$» es un teorema?

*a)* $P \equiv$ «El número $n$ es par»;
$Q \equiv$ «El número $n$ es divisible por 8»;

*b)* $P \equiv$ «El cuadrilátero $ABCD$ tiene sus lados iguales»;
$Q \equiv$ «El cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado»;

*c)* $P \equiv$ «Los números $n$ y $m$ son naturales»;
$Q \equiv$ «El producto $n \cdot m$ es un número natural»;

*d)* $P \equiv$ «El triángulo $ABC$ es equilátero»;
$Q \equiv$ «El triángulo $ABC$ es equiángulo»;

*e)* $P \equiv$ «El producto $x \cdot y$ es nulo»;
$Q \equiv$ «Uno de los factores del producto $x \cdot y$ es nulo»;

*f)* $P \equiv$ «El producto $x \cdot y$ es positivo»;
$Q \equiv$ «Ambos factores del producto $x \cdot y$ son positivos»;

*g)* $P \equiv$ «El producto $n \cdot m$ es impar»;
$Q \equiv$ «Ambos factores del producto $n \cdot m$ son números pares».

**27.** Demostrar por reducción al absurdo cada uno de los teoremas siguientes:

*a)* Dos rectas distintas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

*b)* Si dos rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas lo es a la otra.

*c)* La sucesión de los números primos es indefinida.

*d)* Si el cuadrado de un número entero es impar, entonces dicho número es impar.

*e)* Si $(p \vee q) \wedge \bar{q}$, entonces $p$.

*f)* Si $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow \bar{r}) \wedge r$, entonces $\bar{p}$.

*g)* Si quiero aprobar este curso, debo hacer mis tareas bien.

*h)* Si quiero que me toque la lotería, tengo que jugar.

**28.** Demostrar por el método de inducción completa las fórmulas siguientes:

*a)* $1+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}$.

*b)* $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

*c)* $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$.

*d)* $1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3<\dfrac{n^4}{4}<1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

*e)* $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=$
$=(-1)^{n-1}\cdot(1+2+3+\ldots+n)$.

*f)* $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$.

*g)* $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n-1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

*h)* $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n\cdot(n+1)(n+2)=$
$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

*i)* $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\cdot(2n^2-1)$.

*j)* $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2+$
$+\ldots+\binom{n}{n}b^n$.

# bibliografía


COPI, Irving M.: *Introducción a la Lógica.* Eudeba. Buenos Aires, 1964.

FERRATER MORA, José, y LEBLANC, Hugues: *Fondo de Cultura Económica.* Méjico, 1965.

GALLEGO DÍAZ, José: *Curso general de Matemáticas,* vol. I. Publicaciones de la Universidad del Zulia. Maracaibo, 1963.

HIBERT, D., y ACKERMANN, W.: *Elementos de Lógica Teórica.* Editorial Tecnos. Madrid, 1962.

KEMENY, John G., LAURIE SNELL, J., y THOMPSON, Gerald L.: *Introducción a las Matemáticas finitas.* Compañía Editorial Continental. Méjico, 1962.

QUINE, Willard: *Los métodos de la Lógica.* Ediciones Ariel. Barcelona, 1962.

REY PASTOR, J., y PUIG ADAM, P.: *Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental.* Madrid, 1933.

SACRISTÁN, Manuel: *Introducción a la Lógica y al Análisis Formal.* Ediciones Ariel. Barcelona, 1964.

SEYMOUR, Lipschutz: *Teoría de Conjuntos y temas afines.* Schaum. Colombia, 1969.

SUPPES, Patrick: *Introducción a la Lógica simbólica.* Compañía Editorial Continental. Méjico, 1966.

# índice

PAGS.

## 1. LOGICA MATEMATICA


1. Proposiciones ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 1
2. Conectivas ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 2
3. Operaciones ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 7
4. Tablas de verdad ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 8
5. Tautologías ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 17
6. Implicaciones ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 18
7. Leyes del cálculo proposicional ... ... ... ... ... ... ... ... 20
8. La inferencia en lógica ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 22
9. Lenguaje y cálculo ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 27
10. Cálculo proposicional ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 31
11. Sistemas axiomáticos ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 35
12. Formas derivadas de un teorema ... ... ... ... ... ... ... 36
13. La demostración por reducción al absurdo ... ... ... ... 42
14. Inducción matemática ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 43

*Ejercicios resueltos* ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 47

*Ejercicios propuestos* ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 65

BIBLIOGRAFÍA ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 75